

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА ПО НИЖНЕЙ СТЕНКЕ И С УДАРАМИ ОБ ОБЕ СТЕНКИ В ПОТОКЕ СЖАТОГО ВОЗДУХА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ТРУБОПРОВОДУ

Одержано формули для визначення швидкості після зіткнення двох частинок, одна з яких знаходиться на стінці каналу. Розглянуто рух еліпсоїдальної частинки та її підскоки. При певних спрощеннях проведено інтегрування в елементарних функціях рівнянь руху частинок між стінками у потоці газу. Із урахуванням співвідношень при ударі о стінки отримана загальна картина руху часток у пневмотранспортному трубопроводі.

PARTICLES MOTION OF BULK MATERIAL ON BOTTOM WALL & WITH BOTH WALLS COLLISION IN PRESSED AIR FLOW IN HORIZONTAL PIPELINE

Velocities after & before collisions are got for case when one of particles is on a wall. Elliptic particle motion on bottom wall of channel & its jumping up is investigated. Some simplifications were used for integration motions equations of particles. It became possible to get result in elementary functions & investigate motion with both walls collision.

Вопрос об интегрировании уравнений движения частиц в потоке газа а также их столкновения со стенками канала рассматривался в ряде работ [1- 3]. Однако не исследован вопрос столкновения частицы с другой частицей, которая находится на стенке канала, не изучено движение в потоке газа эллипсоидальной частицы и её подпрыгивание. Целью данной работы является вывод соотношений, которые могут быть использованы для исследования движения ансамбля частиц со взаимными столкновениями.

1. Условия столкновения и проскальзывания-непроскальзывания частиц со стенками канала. Ось Ox направлена слева направо вдоль нижней стенки канала, ось Oy - перпендикулярно к ней снизу-вверх. Условием столкновения i -ой частицы с нижней и с верхней стенкой канала будет соответственно

$$y_i \leq a \quad y_i \geq H - a, \quad (1)$$

Условия проскальзывания-непроскальзывания частиц при ударе о стенки можно получить на основе таких понятий, как угол трения и конус трения.

Уравнения закона сохранения количества движения в проекции на оси Ox , Oy и момента количества движения относительно оси Oz при ударе тела о преграду записываются в виде [4, т. 2]

$$v_x^+ = \bar{v}_x + S_x / m; \quad v_y^+ = \bar{v}_y + S_y / m; \quad \omega^+ = \omega^- + M_C(S_x) / m \rho_C^2, \quad (2)$$

где v_x, v_y, S_x, S_y - проекции скорости центра масс частицы и ударного импульса на оси Ox, Oy ; $M_C(S_x) = -S_x a \operatorname{sign} v_y$ - момент ударного импульса относительно центра масс частицы; $\rho_C = a \sqrt{2/5}$ - радиус инерции частицы; индексы «+» и

« - » при v, ω, S обозначают до- и послеударные значения скоростей и импульсов. При ударе без проскальзывания послеударная скорость точки контакта на частице обращается в нуль

$$V_x^+ = v_x^+ - a \omega^+ \text{sign } v_y^- = 0$$

Кроме того, при ударе в соответствии с гипотезой Ньютона имеется соотношение между импульсами

$$S_y^+ = R S_y^-; \quad (3)$$

Подставляя в первое уравнение (2) значение $v_x^+ = a \omega^+ \text{sign}(v_y^-)$ с учетом третьего уравнения (2) получаем

$$S_x = - \frac{2}{7} m(v_x^- - a \omega^- \text{sign } v_y^-). \quad (4)$$

Согласно данного выше определения угол наклона ударного импульса δ составленный с нормалью, проведенной в точке контакта, к соударяющимся поверхностям в случае удара без проскальзывания должен быть меньше угла трения $\delta < \rho_f$ или

$$\text{tg } \delta < f.$$

получаем условие непроскальзывания при ударе i -ой частицы о стенку канала в виде

$$\frac{2}{7(1+R)} \left| \frac{v_{ix} - a \omega_i \text{sign } v_{iy}}{v_{iy}} \right| < f. \quad (5)$$

2. Удар частицы по другой частице, примыкающей к стенке канала

Как показывают результаты численного моделирования при движении многих частиц в горизонтальном канале, имеет место также случай столкновения, когда на частицу, находящуюся в данный момент времени в контакте с нижней стенкой канала, падает сверху другая частица. Главную трудность представляет определение послеударной поперечной по отношению к оси канала скорости частиц. Если поперечная доударная скорость нижней частицы равна нулю, то, оставаясь в рамках стереомеханической теории удара, невозможно получить ненулевое послеударное значение этой скорости. Вместе с тем известно, что если по шару, находящемуся у стенки ударяет другой шар, то в результате отскакивают от стенки оба. Очевидно, необходим учет упругих свойств, сталкивающихся частиц в зоне их контакта.

Для приближённого определения послеударных поперечных скоростей

сталкивающихся частиц рассмотрим отдельно поперечное их движение как одномерную задачу. Итак, имеется два упругих шара, один из которых, находится в контакте со стенкой, а другой ударяет по первому со скоростью v_0 , после чего оба шара отскакивают от стенки. Необходимо определить скорости отскока обоих шаров. Данная задача состоит в изучении движения двухмассовой системы, в которой упругие свойства тел в контакте описываются двумя упругими элементами, один из которых находится между первым телом и стенкой, а другой между первым и вторым телами, как показано на рис. 1.

Поскольку рассматривается ударный процесс, то силами веса пренебрегаем. Выбирая обобщенные координаты, как величины смещений центров шаров y_1 и y_2 при сжатии упругих элементов, составляем уравнения движения данной системы в виде

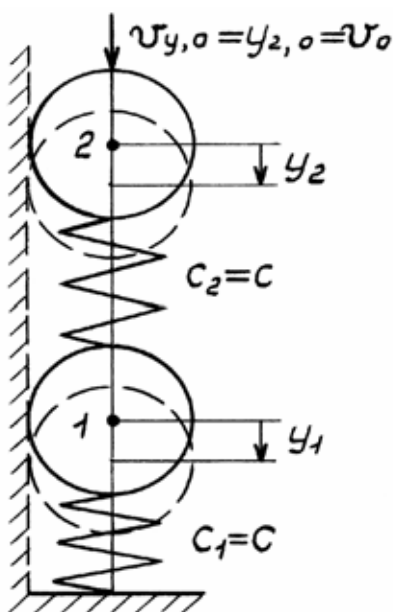


Рис. 1. - Схема для расчета вертикальных скоростей после удара частицы о другую частицу, находящуюся у нижней стенки трубопровода.

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1) &= 0; \\ m \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y_1) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где m - масса шара, $c_1 = c_2 = c$ - жесткость каждого упругого элемента, а также граничные условия:

при $t = 0$

$$y_{10} = y_{20} = 0; \quad v_{10} = \dot{y}_{10} = 0; \quad v_{20} = \dot{y}_{20} = v_{y0} = v_0. \quad (7)$$

Решение уравнений (6) при начальных условиях (7) приведено в [5] и имеет следующий вид:

$$y_1 = \frac{v_0}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{p_1} \sin p_1 t - \frac{1}{p_2} \sin p_2 t \right); \quad y_2 = \frac{v_0}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2p_1} \sin p_1 t - \frac{1+\sqrt{5}}{2p_2} \sin p_2 t \right). \quad (8)$$

При этом p_1, p_2 первая и вторая собственные частоты:

$$p_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} = 0,618034 k; \quad p_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} = 1,618034 k,$$

где $k = \sqrt{c/m}$ - парциальная частота верхнего шара.

Поскольку элементы c_1, c_2 характеризуют упругие свойства контактных областей шаров при их столкновении, то очевидно, что растягивающих усилий в них возникать не может и следовательно выражения (8) описывают поведение данной механической системы только для положительных значений обобщенной координаты y_1 и разности $(y_2 - y_1)$. После того как какая-то из этих величин обращается в нуль происходит либо отделение нижнего шара от горизонтальной стенки либо разъединение шаров. При этом какой-то из упругих элементов отключается и исходная система приведенная на рис. 1 меняет свою структуру в момент $kt_1=4,535$. При этом становится $c_1=0$

Условия разъединения шаров во второй фазе движения также как и для первой имеют вид

$$y_2 - y_1 = 0$$

Откуда

$$\operatorname{tg} k_1 t = \frac{k_1 y_{20}}{v_{10} - v_{20}}. \quad (9)$$

Наименьший положительный корень уравнения (9) равен

$$k_1 t_{**} = 1,6971$$

и он определяет момент времени разлета двух сферических частиц t_{**} .

Значения скоростей частиц в момент их разъединения находим

$$v_{y1}(t_{**}) = -0,21089 v_0; v_{y2}(t_{**}) = -0,97764 v_0.$$

В действительности при описанном случае имеет место неупругий удар, для его учета необходимо снабдить скорости частиц после отскока множителем R , означаящим как и ранее коэффициент восстановления скорости при ударе. Окончательно поперечные скорости отскока частиц в рассматриваемом случае, когда вторая частица ударяет по первой, находящейся в контакте с нижней стенкой канала, имеют следующие значения

$$\left. \begin{aligned} v_{y1} &= -0,211 R v_0; \\ v_{y2} &= -0,978 R v_0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где v_0 - доударная поперечная скорость второй (верхней) частицы.

3. Подпрыгивание частицы, катящейся по нижней стенке трубопровода.

Каждая частица, сталкивающаяся с нижней стенкой горизонтального трубопровода (канала), вследствие неупругого удара теряет часть своей поперечной скорости. После нескольких таких столкновений эта компонента скорости и высота подскока затухая могут стать совсем малыми. Тогда движение частицы следует описывать как качение по нижней стенке. При этом у частицы несферической гладкой формы, двигающейся в вертикальной плоскости, центр масс перемещается по некоторой периодической кривой. В местах на траектории, где выпуклость обращена вверх, возникающая центробежная сила будет направлена вверх и при достижении скоростью некоторой величины может вместе с силой Магнуса-Жуковского превысить вес частицы. В этом случае частица отделяется от нижней стенки канала и начинает подпрыгивать.

Интегрирование дифференциальных уравнений движения частицы эллиптического поперечного сечения показывает, что разгон катящейся частицы средних и крупных размеров обычно происходит без проскальзывания. Перед отрывом частицы имеет место небольшой (0,05 - 0,15) l участок проскальзывания, где l - полная длина разбега частицы до состояния отрыва. Для приближенного определения скорости отрыва частицы пренебрегаем этим участком и полагаем, что отрыв происходит при качении частицы без проскальзывания. В этом случае мгновенная скорость точки контакта A , принадлежащая частице, равна нулю. Принимая точку A за полюс (см. рис. 2), записываем для центра частицы

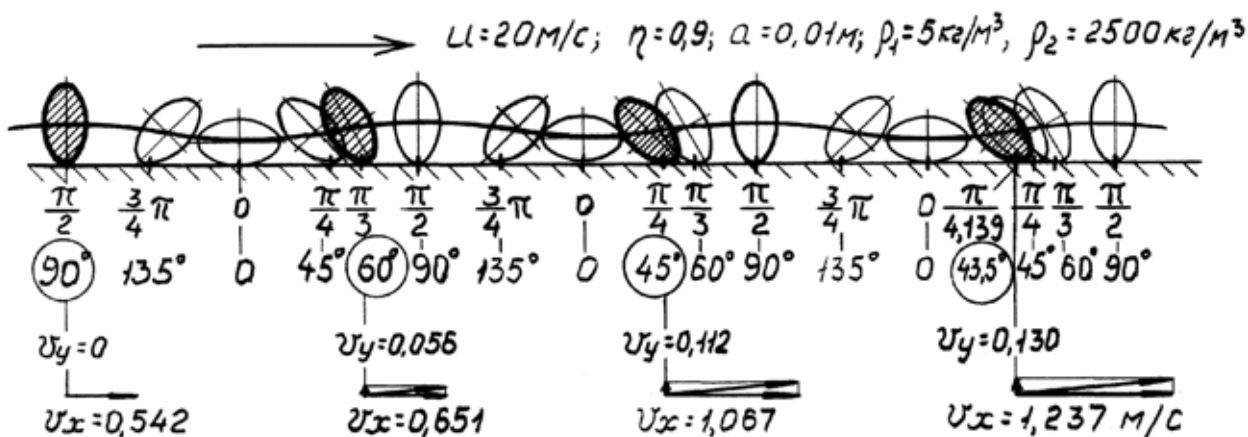


Рис. 2. - Схема эллипсоидальной частицы, катящейся в потоке газа, с указанием возможных положений, соответствующих состоянию ее отделения от стенки, в том числе и с наибольшей скоростью отрыва (43,5°).

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{i}(\omega_y r_z - \omega_z r_y) - \vec{j}(\omega_x r_z - \omega_z r_x) + \vec{k}(\omega_x r_y - \omega_y r_x).$$

Поскольку рассматривается плоская задача и $\omega_z = -\omega$; $\omega_x = \omega_y = 0$, $r_y = y$, $r_x = \Delta$, $r_z = 0$, то $\vec{v}_0 = \vec{i}\omega y + \vec{j}\omega\Delta$ или в проекциях на ось O_1x :

$$v = \omega y = a\omega \sqrt{\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi} \quad (11)$$

и на ось O_1y :

$$v_y = \dot{y} = \omega \Delta = \frac{\omega a(1 - \eta^2) \sin 2\varphi}{2 \sqrt{\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (12)$$

Из выражения (12) видно, что поперечная скорость частицы v_y зависит от угловой скорости ω и угла поворота φ , представляя собой знакопеременную периодическую функцию φ , которая имеет \min и \max . Предположим, что в момент отрыва частицы от нижней стенки ее поперечная скорость будет максимальной. Пренебрегая небольшим изменением угловой скорости частицы на коротком участке длиной $\sim 2\pi a$ за счет разгона, полагаем, что угловая скорость ω постоянна и определим максимальную величину v_y , а также значение угла поворота частицы φ , при котором достигается этот максимум.

Условие $\max v_y(\varphi)$ имеет вид

$$\frac{dv_y}{d\varphi} = 0.$$

после преобразований получаем

$$v_{y, \max} = (1 - \eta) a \omega.$$

Если $\eta = b/a = 0,9$, то находим

$$\varphi = 43,4925^\circ \cong 43,5^\circ,$$

т.е. поперечная скорость частицы с несферичностью $\eta = 0,9$ достигает максимума, когда большая полуось эллипса составит с нижней стенкой угол близкий к 45° , а поперечная скорость $v_y \sim 0,1 v_x$.

Определим величину продольной скорости частицы $v_x \approx v = a\omega$, соответствующую состоянию ее подпрыгивания. Полагаем, что это происходит в тот момент, когда скорость частицы такова, что центробежная сила инерции вместе с подъемной силой Магнуса-Жуковского уравновесят силу тяжести и нормальная составляющая контактной силы (N) обратится в нуль. Второе условие отрыва частицы записывается в виде

$$N = m(g + \ddot{y}) - F_{\text{М.-Ж.}} = 0.$$

Определим \ddot{y} . Из левой части выражения (12) находим

$$\ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv_y}{d\varphi} \omega. \quad (13)$$

Дифференцируя в правой части (12) v_y по φ и считая, что ω постоянно, после подстановки в (13) и преобразований получаем

$$\ddot{y} = - \frac{(1 - \eta^2)(\sin^4 \varphi - \eta^2 \cos^4 \varphi)}{(\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} a \omega^2.$$

Подставляя это, во второе условие отрыва частицы записываем

$$\frac{(\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi)^2 - (1 - \eta^2)(\sin^4 \varphi - \eta^2 \cos^4 \varphi) \rho_2 / 2 \rho_1}{(\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} (a \omega)^2 - u(a \omega) + ga \rho_2 / 2 \rho_1 = 0.$$

Решая относительно $a \omega$ квадратное уравнение, получаем

$$a \omega = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - ga \Phi(\varphi) \rho_2 / \rho_1}}{\Phi(\varphi)}, \quad (14)$$

где

$$\Phi(\varphi) = 2 \sqrt{\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi} - \frac{\rho_2 (1 - \eta^2)(\sin^4 \varphi - \eta^2 \cos^4 \varphi)}{\rho_1 (\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Из двух значений $(a \omega)_{\pm}$ далее принимаем меньшее $(a \omega)_{-}$ по смыслу скорости отрыва. Подставляя $a \omega$ из (14) в (11) и (12) получаем выражения для v и v_y

$$v = \sqrt{\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi} - \left[u - \sqrt{u^2 - ga \Phi(\varphi) \rho_2 / \rho_1} \right] / \Phi(\varphi); \quad (15)$$

$$v_y = (1 - \eta^2) \sin 2\varphi \left[u - \sqrt{u^2 - ga \Phi(\varphi) \rho_2 / \rho_1} \right] / 2 \Phi(\varphi) \sqrt{\sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi}.$$

Наименьшие значения v , v_y имеют место при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а затем по мере уменьшения φ они монотонно возрастают и при $\varphi \approx \frac{\pi}{4}$ делают резкий скачок в сторону увеличения. Здесь следует иметь в виду, что угол φ представляет собой периодическую функцию времени с периодом равным π .

Проследим за катящейся частицей (см. рис. 2). При $\varphi = \pi/2$ скорость v наименьшая и хотя $N = 0$, но поскольку поперечная скорость v_y равна нулю, то

отрыва частицы не произойдет. Частица продолжая качение в потоке газа увеличивает свою продольную скорость так, что контактная сила N на следующих оборотах обращается в нуль уже при меньшем значении угла чем $\frac{\pi}{2}$ например при $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Для этого угла поперечная скорость уже не равна нулю (рис. 3.) и произойдет кратковременное отделение частицы от стенки. Совершая дальнейшие обороты при качении частица ускоряясь будет отделяться от стенки все с большей поперечной скоростью и на большие промежутки времени. Максимального значения эта скорость достигает при $\varphi = \arctg \sqrt{\eta}$. При значениях $\varphi < \arctg \sqrt{\eta}$ нет смысла рассматривать положение катящейся частицы на предмет ее отрыва поскольку при $\varphi = \arctg \sqrt{\eta}$ происходит смена знака ускорения \ddot{y} и связанной с ним центробежной силы, которая при $\varphi < \arctg \sqrt{\eta}$ будет прижимать частицу к стенке и для достижения условия $N = 0$ требуется значительно повысить угловую скорость частицы с тем, чтобы сила $F_{м.-ж.}$ могла уравновесить сумму $m(g + \ddot{y})$. Следовательно отделение частицы от стенки и подпрыгивание происходит на этапе движения от $\varphi = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi = \arctg \sqrt{\eta}$ при скоростях определяемых из (15).

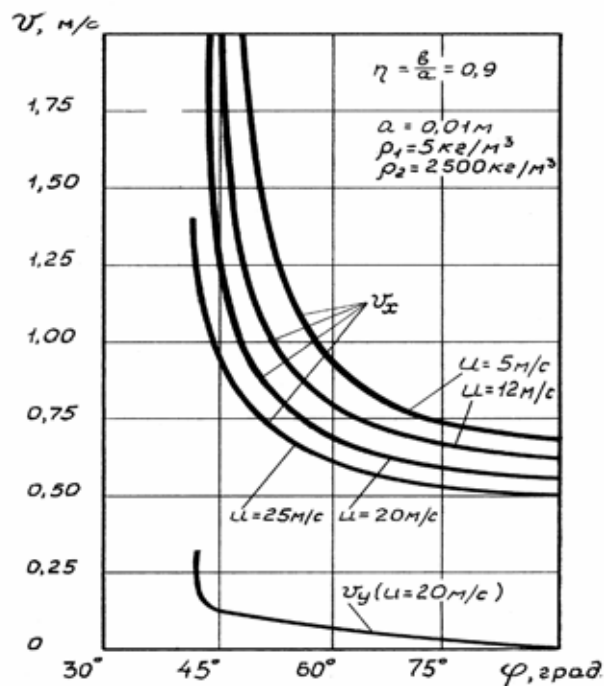


Рис. 3.- Изменение продольной (v_x) и поперечной (v_y) составляющей скорости эллипсоидальной частицы, катящейся в потоке газа (u), в момент ее отрыва от горизонтальной стенки, в зависимости от угла наклона к горизонту большой оси эллипсоида.

В качестве продольной и поперечной скорости отрыва принимаем их значения при $\varphi = \arctg \sqrt{\eta}$, а движение на этапе $\arctg \sqrt{\eta} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, как и ранее в нача-

ле параграфа упомянутое движение с малыми подскоками после удара частицы о стенку при их затухании, условно считаем качением без подпрыгивания.

Полагая в (15) $\varphi = \arctg \sqrt{\eta}$, получаем для горизонтальной составляющей скорости отрыва частицы следующую формулу

$$v_{\text{отр}} = v = \left(u - \sqrt{u^2 - 2\sqrt{\eta} g a \rho_2 / \rho_1} \right) / 2. \quad (16)$$

Вертикальная компонента скорости отрыва после подстановки $\varphi = \arctg \sqrt{\eta}$, в (15) получается в виде

$$v_{y, \text{max}}^{\text{отр}} = (1 - \eta) \left(u - \sqrt{u^2 - 2\sqrt{\eta} g a \rho_2 / \rho_1} \right) / 2\sqrt{\eta}$$

Отношение вертикальной компоненты к горизонтальной будет равно

$$v_{y, \text{max}}^{\text{отр}} / v_{\text{отр}} = (1 - \eta) / \sqrt{\eta}$$

Для $\eta = 0,9$ это отношение составит 0,1054.

4. Численное моделирование процесса движения одной частицы между стенками в потоке газа по горизонтальному трубопроводу.

При воздействии потока газа на частицы дисперсного материала, в зависимости от соотношений между параметрами аэросмеси возможны различные режимы движения в пространстве между параллельными стенками, в том числе движение при последовательных соударениях с нижней и верхней стенками или только о нижнюю стенку. В случае аэросмеси с невысокой объемной концентрацией дисперсной фазы ($\alpha < 0,05$) частицы значительно чаще сталкиваются со стенками, чем между собой. Пренебрегаем соударениями частиц между собой, рассмотрим движение отдельной частицы материала.

Исследуем движение частицы сферической формы в однородном потоке газа в горизонтальном трубопроводе (канале). При этом учитываем возможные столкновения частицы с верхней и нижней стенками, во время которых происходит скачкообразное изменение линейной и угловой скорости частицы. Для изучения движения частицы между горизонтальными параллельными стенками используем систему прямоугольных координат Oxy . Начало координат помещаем на нижней стенке канала. Ось Ox направляем вправо вдоль нижней стенки, ось Oy – вверх перпендикулярно стенкам, расстояние между которыми равно H . На этапе движения частицы в потоке газа между столкновениями полагаем поперечную скорость частицы \dot{y} малой по сравнению с $(u - \dot{x})$, где x, y – координаты центра массы частицы, u – скорость газа. В связи с этим сила Магнуса-Жуковского [6, 7], которая возникает за счет циркуляции газа при обтекании вращающейся частицы, будет считаться направленной поперек канала ($F_{\text{МЖ}}^x =$

0), а сила аэродинамического сопротивления – вдоль оси канала ($F_a^y = 0$). В этом случае движение частицы между столкновениями со стенками при больших значениях чисел Рейнольдса описывается уравнениями движения материальной точки

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0,5c_\mu\pi a^2\rho_1(u-\dot{x})^2; \\ m\ddot{y} &= -mg - 8\pi a^3\rho_1\omega(u-\dot{x})/3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где π - число Архимеда; ρ_1, u – плотность и скорость газа; $c_\mu = 0,5$ – коэффициент аэродинамического сопротивления частицы; x, y, a, ω, m - координаты центра массы, радиус, угловая скорость и масса частицы; g – ускорение свободного падения.

Сопротивлением воздуха движению частиц в поперечном по отношению к оси трубопровода направлении пренебрегаем.

Рассматривая движение частицы на участке небольшой длины трубопровода, полагаем постоянными скорость и плотность газа (u, ρ_1). Изменением угловой скорости частицы в промежутках между столкновениями по сравнению с изменениями ее при столкновении частицы со стенками пренебрегаем. Интегрируя уравнения (1), записываем

$$\left. \begin{aligned} v_x &= C^{-1}[(C-1)u + v_{0x}]; \\ v_y &= v_{0y} - (t-t_0)g - B\omega \ln C; \\ x &= x_0 + (t-t_0)u - A^{-1} \ln C \\ y &= y_0 + (t-t_0)v_{0y} - 0,5(t-t_0)^2g - \{[(u-v_{0x})A]^{-1}C \ln C - t + t_0\}B\omega, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} - координаты центра масс и послеударные скорости частицы в момент t_0 последнего столкновения частицы или начала движения на очередном этапе,

$$A = \frac{3c_\mu\rho_1}{8a\rho_2}, \quad B = \frac{16a}{3c_\mu}, \quad C = (u - v_{0x})(t - t_0)A + 1,$$

где ρ_2 – плотность материала частицы.

Был проведен расчет движения частицы при следующих условиях: скорость газа $u = 20$ м/с, радиус частицы $a = 0,005$ м, плотность материала частицы $\rho_2 = 2000$ кг/м³, плотность газа $\rho_1 = 5$ кг/м³, расстояние между стенками канала $H = 0,2$ м, шаг по времени $\Delta t = 0,02$ с, коэффициент восстановления при ударе $R = 0,5$, коэффициент аэродинамического сопротивления $c_\mu = 0,5$. Коэффициенту трения придавались значения $f = 0,1; 0,2; 0,3$. Начальная угловая скорость $\omega = 0$. Решения проведены для различных начальных условий по ко-

ординатам и скоростям. Выявлено, что режим движения частицы, который устанавливается при достаточном удалении от места начала движения, слабо зависит от начальных условий. При $f = 0,2$ и $f = 0,3$ устанавливается режим движения частицы с поочередными столкновениями с нижней и верхней стенкой. При $f = 0,3$ столкновения происходят чаще, чем при $f = 0,2$. При $f = 0,1$ реализуется скачкообразный режим без столкновения с верхней стенкой с постепенно уменьшающейся амплитудой, который переходит в качение по нижней стенке. Траектории частиц в потоке газа приведены на рис. 4.

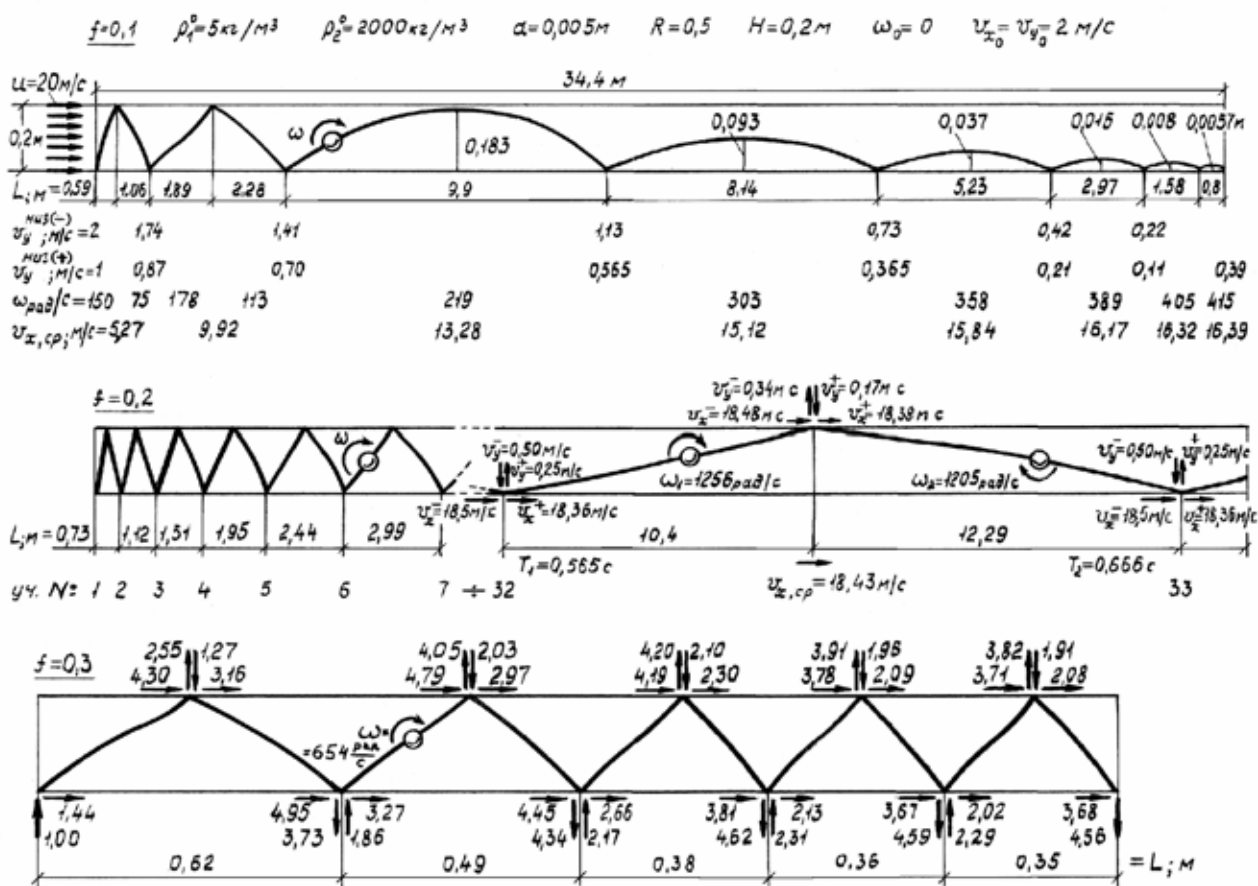


Рис. 4. - Траектории вращающихся частиц, движущихся в потоке газа по горизонтальному каналу, при разных значениях коэффициента трения (f). Показаны скорости частиц до и после удара о стенки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. Динамика. – М. : Высш. шк. – 1966. – 411 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М. : Стройиздат, 1965. – 465 с.
3. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. – М.: Наука, 1985. – 200 с.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1982. – Т. 2. – 640 с.
5. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1973. – 847 с.
7. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М. : Наука, 1978. – 336 с.